4. Convolución

4.1. Funciones escalón e impulso

Función escalón: u

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases} \quad | \quad u[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$

Función impulso unitario: δ

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt}u(t-t_0) \approx \begin{cases} 1, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad | \quad \delta[n-n_0] = u[n-n_0] - u[n-n_0-1] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

En realidad, resulta algo impreciso definir $\delta(t)$ de esta forma, en términos de lo que *es*. Es mejor definirlo en términos de lo que *hace*. Pero por lo pronto, es suficiente.

4.2. Tren de impulsos, y definición de la convolución

Tengamos una secuencia $X = \{... + x_{-3} + x_{-2} + x_{-1} + x_0 + x_1 + x_2 + ...\}$. Podemos definir una función discreta tal que $x_\delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta[n-k]$, con δ desplazado con respecto a n para así corresponderse espacialmente con el lugar en la secuencia de X. Ahora, digamos que los términos de la secuencia X fueran establecidos en base a una función $x[n]$ tal que $x_k = x[k]$, se puede ver que $x[n]$ es idéntico al $x_\delta[n]$ establecido anteriormente. Matemáticamente:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

En tiempo continuo, considerando el caso de impulsos infinitesimalmente cercanos, la sumatoria se vuelve una integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Ahora, considerando un sistema lineal invariante en el tiempo discreto, para el que conozcamos su respuesta a impulso, denotada por la letra h.:

$$x_1[n] = \delta[n] \implies y_1[n] = h[n]$$

Que sea un sistema invariante en el tiempo quiere decir que:

$$x_2[n] = \delta[n-n_0] \implies y_2[n] = h[n-n_0]$$

Y que sea un sistema lineal quiere decir que:

$$x_3[n] = x_1[n] + 2x_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-n_0] \implies y_3[n] = y_1[n] + 2y_2[n] = h[n] + 2h[n-n_0]$$

Considerando entonces la entrada de un sistema lineal invariante en el tiempo como un tren de impulsos, conociendo la respuesta del sistema a uno de estos impulsos, podemos determinar su respuesta a cualquier entrada:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \implies y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Esta última sumatoria es la sumatoria de convolución discreta. Para un sistema continuo, nuevamente, esta sumatoria se vuelve una integral de convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

4.3. Convolución Discreta

4.3.1. Formas de resolver

Calcular la salida del sistema para las siguientes entradas y respuestas a impulso:

1.
$$x[n] = u[n] + u[n-2] - 2 \cdot u[n-3]$$
$$h[n] = \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-3] - \delta[n+1]$$

La convolución es una operación lineal, por lo que la propiedad de distributividad se mantiene. Así, tenemos que:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$y[n] = x[n] * (\delta[n] + 2 \cdot \delta[n-3] - \delta[n+1])$$
$$y[n] = x[n] * \delta[n] + 2 \cdot x[n] * \delta[n-3] - x[n] * \delta[n+1]$$

Distribuyendo de esta forma, se puede ver que el primer elemento corresponde a definir $x[n]$ con un tren de impulsos, por lo que se puede ignorar el $\delta[n]$. Desarrollando el segundo componente conmutado, se puede ver que:

$$\delta[n-3] * x[n] = \int_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k+3] \cdot x[n-k]$$

Por definición del impulso, se evalúa que esta sumatoria sólo entregará valores distintos a 0 si $k = 3$. Por lo tanto,

$$\delta[n-3] * x[n] = \int_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-3] \cdot x[n-k]$$
$$= x[n-k], k = 3$$

$$\delta[n-3] * x[n] = x[n-3]$$

(Alternativamente, realizando el mismo análisis sin conmutar, se tendría:

$$x[n] * \delta[n-3] = \int_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[(n-k) - 3]$$
$$n - k - 3 = 0 \iff k = n - 3$$

$$x[n] * \delta[n-3] = x[n-3]$$

entregando el mismo resultado.)

Rebobinando al ejercicio en cuestión, esta propiedad de convolución con impulsos se extiende a todos los impulsos, por lo que:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$
$$y[n] = x[n] + 2 \cdot x[n-3] - x[n+1]$$

Esta respuesta es suficiente, pero podemos explicitarla:

$$y[n] = u[n] + u[n-2] - 2 \cdot u[n-3] + 2(u[n-3] + u[n-5] - 2 \cdot u[n-6])$$
$$- (u[n+1] + u[n-1] - 2 \cdot u[n-2])$$

$$y[n] = u[n] - u[n+1] - u[n-1] + 3 \cdot u[n-2] + 2 \cdot u[n-5] - 4 \cdot u[n-6])$$

scy

4.6 TABLAS DE LAS PROPIEDADES DE FOURIER Y DE LOS PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

En las secciones anteriores y en los problemas al final del capítulo, hemos tomado en consideración algunas de las propiedades importantes de la transformada de Fourier. Éstas se resumen en la tabla 4.1, en la cual también hemos indicado en qué sección de este capítulo se ha analizada cada propiedad.

En la tabla 4.2 hemos preparado una lista de los pares de transformadas de Fourier que son básicos e importantes. Muchos de éstos los encontraremos en repetidas ocasiones conforme apliquemos las herramientas del análisis de Fourier en el examen de las señales

TABLA 4.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sección	Propiedad	Señal aperiódica	Transformada de Fourier
		$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
4.3.1	Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Desplazamiento de tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)\,Y(j\omega)$
4.5	Multiplicación	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$
4.3.4	Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \|X(j\omega)\| = \|X(-j\omega)\| \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Simetría para señales real y par	$x(t)$ real y par	$X(j\omega)$ real y par
4.3.3	Simetría para señales real e impar	$x(t)$ real e impar	$X(j\omega)$ puramente imaginaria e impar
4.3.3	Descomposición par-impar de señales reales	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$

4.3.7 Relación de Parseval para señales aperiódicas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

TABLA 4.2 PARES BÁSICOS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Señal	Transformada de Fourier	Coeficientes de la serie de Fourier (si es periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, con otro valor
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, con otro valor
$\mathrm{sen}\, \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, con otro valor
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (Esta es la representación en serie de Fourier para cualquier selección de $T > 0$)
Onda cuadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ y $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{sen}\, k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\mathrm{sen}\, k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\,\mathrm{sen}\, \omega T_1}{\omega}$	–
$\frac{\mathrm{sen}\, Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 2, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	–
$\delta(t)$	1	–
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	–
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	–
$e^{-at}u(t), \mathcal{R}_e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	–
$te^{-at}u(t), \mathcal{R}_e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	–
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}_e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	–

Propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada de Fourier	Serie de Fourier
Linealidad	$Ax(t)+By(t)$	$AX(j\omega)+BY(j\omega)$	Aa_k+Bb_k, si $\omega_x \sim \omega_y$
Dualidad	$\mathcal{F}\{x(t)\}=X(j\omega)$, $\mathcal{F}\{X(t)\}=2\pi x(-j\omega)$		(N/A)
Desplazamiento de tiempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$	$a_k e^{-\frac{2j\pi k}{T}t_0}$
Desplazamiento de frecuencia	$e^{j\omega_a t}x(t)$	$X\big(j(\omega-\omega_a)\big)$	si $\omega_a=M\omega_0$, a_{k-M}
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$	a_{-k}
Escalamiento de tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$	a_k, $\omega_0'=a\omega_0$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)\cdot Y(j\omega)$	Ta_kb_k
Multiplicación	$x(t)\cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*Y(j\omega)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación en tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$	$\frac{2jk\pi}{T}a_k$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$	$\frac{T}{2jk\pi}a_k$
Diferenciación en frecuencia	$t\cdot x(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$	(N/A)
Simetría conjugada de una señal real en t.	$\mathcal{R}e\{x(t)\}=x(t)$	$X(j\omega)=X^*(-j\omega)$	$a_k=a^*_{-k}$
Descomposición en paridad de señales reales en tiempo	$\mathcal{R}e\{x(t)\}=x(t)$, $\mathcal{F}\{x(t)\}=X(j\omega)$ $\mathcal{F}\{\mathcal{E}v\{x(t)\}\}=\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$, $\mathcal{F}\{\mathcal{O}d\{x(t)\}\}=\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$		$a_{k_{ev(x)}}=\mathcal{R}e\{a_k\}$ $a_{k_{od(x)}}=j\mathcal{I}m\{a_k\}$
Relación de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(j\omega)\rvert^2d\omega$		$\frac{1}{T}\int_T \lvert x(t)\rvert^2dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert a_k\rvert^2$

Transformada de Fourier

1.- Calcule la Transformada de Fourier de las siguientes señales:

a) x[n]= u[n-2]-u[n-6]

x[n]=g[n-2]+ g[n-3]+ g[n-4]+ g[n-5]

Se aplica la transformada directa:

$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$

$$= e^{-jw2} + e^{-jw3} + e^{-jw4} + e^{-jw5}$$

b) x[n]= 2^n u[n]

Se aplica la transformada directa:

$a^n u[n], \quad \|a\| < 1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

$$= \frac{1}{1-2e^{-jw}}$$

c) x(t)= $t^9e^{-6t}u(t)$

Se aplica transformada directa:

$$t^n e^{-at}u(t) \qquad \frac{n!}{(j\omega+a)^{n+1}} \qquad \mathrm{Re}(a) > 0$$

$$= \frac{9!}{(jw+6)^{10}}$$

e) x(t)= $e^{-2(t-1)}u(t-1)$

Primero se aplica la propiedad de desplazamiento:

$$x[n - n_0] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

Quedando:

$$= e^{-1jw} X(e^{-2t}u(t))$$

Y después formula directa:

$$e^{-at}u(t) \qquad \frac{1}{j\omega + a}$$

$$= \frac{e^{-jw}}{2 + jw}$$

f) x(t) = $e^{-2|t-1|}$

Si sacamos el valor absoluto nos quedan dos funciones:

x(t) = $e^{-2(t-1)}$; para números mayores que 1

x(t) = $e^{2(t-1)}$; para números menores que 1

Se aplica desplazamiento y formula directa a cada una, quedando:

$$= \frac{e^{-jw}}{2 + jw} + \frac{e^{-jw}}{2 - jw}$$

g) x(t) = $\{\begin{matrix} n, si -3 \leq n \leq 3 \\ 0, si\ e.o.c \end{matrix}$

Lo Podemos escribir de la siguiente forma:

x[n]= -3g[n+3] - 2g[n+2] - g[n+1] + g[n-1] +2g[n-2] + 3g[n-3]

Y esta señal tiene fórmula directa, que aplicada queda:

$$= -3e^{3jw} - 2e^{2jw} - e^{jw} + e^{-jw} + 2e^{-2jw} + 3e^{-3jw}$$

h) x(t)= $e^{-3t}\cos(\pi/2t)u(t)$

Podemos aplicar fórmula directa:

$$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t) \qquad \frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$$

$$= \frac{3+jw}{(jw+3)^2+\frac{\pi^2}{2}}$$

i) x(t)= $e^{-6t}\text{sen}(\pi/2t)u(t)$

Podemos aplicar fórmula directa:

$$e^{-at}\sin\omega_0 t\, u(t) \qquad \frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$$

$$= \frac{\pi/2}{(jw+6)^2+\frac{\pi^2}{2}}$$

Transformada de Z

1. Calcule la transformada de Z de las siguientes señales
   - (a) $x[n] = (\frac{1}{5})^n u[n-3]$
   - (b) $x[n] = \delta[n+5]$
   - (c) $x[n] = (-1)^n u[n]$
   - (d) $x[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} u[n+3]$
   - (e) $x[n] = (-\frac{1}{3})^n u[-n-2]$
   - (f) $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[3-n]$
   - (g) $x[n] = 2^n u[-n] + \frac{1}{4} u[n-1]$
   - (h) $x[n] = (\frac{1}{3})^{n-2} u[n-2]$
2. Calcule la transformada inversa de z
   - (a) $X(z) = \frac{1-(1/3)z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}, \qquad |z| > 2$
   - (b) $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}, \qquad |z| > 1/2$
   - (c) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \qquad |z| < 1/2$
   - (d) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \qquad |z| > 1/2$
   - (e) $X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > 1/2$
   - (f) $X(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| < 1/2$
   - (g) $X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}, \qquad |z| > 1$

Ejercicios resueltos

1. (a)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} u[n-3]z^{-n} \\
&= \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+3} z^{-(n+3)} \\
&= \left(\frac{1}{5}\right)^{3} z^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n} u[n]z^{-n} \\
&= \left[\frac{z^{-3}}{125}\right]\frac{1}{(1-(1/5)z^{-1})} \qquad |z| > 1/5
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+5]z^{-n} \\
&= z^{5} \qquad \textit{Todo } z
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n}z^{-n} \\
&= 1/(1+z^{-1}) \qquad |z| > 1
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-3}^{\infty} (1/2)^{n+1}z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1/2)^{n-2}z^{-(n-3)} \\
&= 4z^{3}/(1-(1/2)z^{-1}) \qquad |z| > 1/2
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1/3)^{n} z^{-n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (-1/3)^{-n} z^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1/3)^{-(n+2)} z^{n+2} \\
&= 9z^{2}/(1+3z) \qquad |z| < 1/3 \\
&= 3z/(1+(1/3)z^{-1}) \qquad |z| < 1/3
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{3} (1/4)^{n} z^{-n} \\
&= \sum_{n=-3}^{\infty} (1/4)^{-n} z^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1/4)^{-(n-3)} z^{n-3} \\
&= (1/64)z^{-3}/(1-4z) \qquad |z| < 1/4
\end{aligned}
$$

(g) Si $x_1[n] = 2^{n}u[-n]$ y $x_2[n] = (1/4)^{n}u[n-1]$

$$
\begin{aligned}
X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{0} (2)^{n} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2)^{-n} z^{n} \\
&= 1/(1-(1/2)z) \qquad |z| < 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1/4)^n z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1/4)^{n+1} z^{-n-1} \\
&= (z^{-1}/4)(1/(1-(1/4)z^{-1})) \qquad |z| > 1/4
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) \qquad (1/4) < |z| < 2$$

(h)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} (1/3)^{n-2} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1/3)^n z^{-n-2} \\
&= z^{-2}[1/(1-(1/3)z^{-1})] \qquad |z| > 1/3
\end{aligned}
$$

2. (a) Usando fracciones parciales

$$X(z) = \frac{2/9}{1-z^{-1}} + \frac{7/9}{1+2z^{-1}}$$

Como

$$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$x[n] = \frac{2}{9}u[n] + \frac{7}{9}(-2)^n u[n]$$

(b) $X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \\
x[n] &= {\frac{1}{2}}^{n} u[n]
\end{aligned}
$$

(c) $X(z) = \frac{-1/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3/2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$
Como la ROC es $|z| < 1/2$

$$x[n] = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}^{\,n} u[-n-1] - \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}^{\,n} u[-n-1]$$

(d) $X(z) = \frac{-1/2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3/2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$
Como la ROC es $|z| > 1/2$

$$x[n] = -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}^{\,n} u[n] + \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}^{\,n} u[n]$$

(e) $X(z) = -2 + \frac{3/2}{1-(1/2)z^{-1}}$
Como la ROC es $|z| > 1/2$

$$x[n] = -2\delta[n] + \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}^{\,n} u[n]$$

(f) $X(z) = -2 + \frac{3/2}{1-(1/2)z^{-1}}$
Como la ROC es $|z| < 1/2$

$$x[n] = -2\delta[n] - \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}^{\,n} u[-n-1]$$

(g) $X(z) = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-z^{-1}}$

$$x[n] = -\ \frac{1}{2}^{\,n} u[n] + 2u[n]$$

Preguntas.

1) solo se puede aplicar convolucion cuando.

* el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

2) La convulocion

* combina una señal de entrada con un sistema para obtener una salida.

3) Un sistema LTI se caracteriza por.

* con su respuesta al impulso.

4) una respuesta al escalon de un sistema LIT discreto es:

* la sumatoria consecutiva de su respuesta al impulso

5) La respuesta de un sistema SLIT sera:

* la superposicion de las respuestas escaladas del sistema a cada uno de los impulsos

6) Si un sistema es invariante en el tiempo, las respuestas al impulsos desplazados en el tiempo:

* son versiones desplazadas en el tiempo de la misma respuesta

7) la propiedad distributivo permite.

* separar los procesos en varios procesos paralelos.

8) Una serie de Fourier utiliza coeficientes que den en:

* el aporte de cada exponencial compleja a la señal

9) La convolucion discreta es una operacion que:

* implica la utilizacion de productos de sumas entre una señal y un sistema.

10) el desplazamiento y la derivacion en el tiempo:

* son posibles en la transformada de Fourier.

11) La transformada de fourier de una señal cuadratica periodica:

* va a generar una secuencia de impulsos en el dominio de la frecuencia

2. La Región de Convergencia (ROC) para la propiedad del escalamiento en la transformada Z es:

- [ ] La inversa de la ROC de la función original
- [ ] Una región rectangular en el plano complejo
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] Una versión escalada de la ROC de la transformada de la función original

4. La Energía entre la señal y su transformada:

- [ ] Aumenta
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] Se conserva
- [ ] Se reduce

5. La función de transferencia $H(z)$ se puede obtener:

- [x] del cociente de las transformadas Z de las salidas y las entradas
- [ ] del producto de las transformadas Z de las salidas y las entradas
- [ ] de la suma de las transformadas Z de las salidas y las entradas
- [ ] Ninguna de las demás respuestas

10. La Región de Convergencia (ROC) para la propiedad de la convolución en la transformada Z es:

- [ ] Es la unión de las ROCs
- [x] Es la intersección de las ROCs
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Es la intersección de las inversas de las ROCs

2. La transformada Z se reduce a la transformada de Fourier cuando:

- [ ] la ROC de F(z) incluye polos
- [ ] el radio del vector es menor a 1
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] z es unitaria:$z = e^{j\omega}$

3. La ROC de la Transformada Z $X(z)$ consiste en:

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] una sección rectangular del plano z
- [x] un anillo en el plano z alrededor del origen
- [ ] dos secciones rectangulares consecutivas en el plano z

4. En tiempo discreto, el espectro de un filtro es:

- [ ] Inestable
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] Periódico
- [ ] Aperiódico

5. Si la transformada Z $X(z)$ de $x[n]$ es racional,

- [x] entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito
- [ ] la ROC incluye polos en círculo unitario
- [ ] la ROC se limita por los ceros o se extiende al infinito
- [ ] Ninguna de las demás respuestas

10. Si la región de convergencia de la Transformada Z (ROC) incluye el círculo unitario,

- [ ] los coeficientes de la serie de fourier se hacen infinitos
- [x] la Transformada de Fourier también converge
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] la convolución en frecuencia deja de ser válida

4. La transformada Z se reduce a la transformada de Fourier cuando:

- [ ] z es $\delta[n]$
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] z es unitaria ($z = e^{j\omega}$)
- [ ] z es par

5. Un filtro IIR

- [x] Requiere utilizar las salidas anteriores
- [ ] Requiere solo las entradas anteriores
- [ ] Siempre es estable por definición
- [ ] Ninguna de las demás respuestas

6. La región de convergencia de la transformada Z:

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Incluye ceros y polos
- [x] Puede tener ceros
- [ ] Incluye solamente polos

1. La región de convergencia de la transformada Z

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Cubre todo el plano complejo
- [x] Es el conjunto de puntos donde la transformada Z tiene un valor finito
- [ ] Siempre es un círculo unitario

8. Una ecuación de diferencias en Z:

- ☐ Ninguna de las demás respuestas
- ■ Sólo depende de la ubicación de los polos para saber si converge
- ☐ Siempre converge
- ☐ Sólo depende de la ubicación de los ceros para saber si converge

9. Si el índice de modulación en AM aumenta por encima de 1, entonces ocurre:

- ● Un cambio de fase cuando cruza el cero
- ○ Un aumento de amplitud cuando cruza el cero
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ Un cambio de frecuencia de portadora cuando cruza el cero

2. La propiedad de la modulación implica que:

- ○ aparecen señales desplazadas a partir de un producto en frecuencia
- ○ no se alteran las señales
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ● aparecen señales desplazadas a partir de un producto temporal

3. La transformada Z de una cascada de funciones de transferencia se representa como:

- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ una suma
- ● un producto
- ○ una diferencia

5. Los polos de una función de transferencia hacen al sistema en ese punto:

- ● inestable
- ○ estable
- ○ constante
- ○ Ninguna de las demás respuestas

6. La ROC para la propiedad de la Derivada es:

- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ Es una versión escalada de la ROC
- ● Es la misma ROC
- ○ Es la inverrsa de la ROC

○ Ninguna de las demás respuestas

5. Si una función de transferencia contuviera polos en la ROC ésta sería en ese punto:

- ● inestable
- ○ estable
- ○ constante
- ○ Ninguna de las demás respuestas

6. La ROC para la propiedad de la Integral(Acumulación) es:

- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ Es una versión escalada de la ROC
- ● Es al menos la intersección de R y $|z| > 1$
- ○ Es la inversa de la ROC

2. La modulación FM implica que:

- ○ se realiza un producto de la modulante por la portadora
- ○ se incrementa la amplitud de la portadora
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ● se modifica la frecuencia según la amplitud de la modulante

8. Si $x[n]$ es de duración finita, entonces la ROC es:

- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ● el plano z completo, excepto posiblemente en $z = 0$ y/o en $z = \infty$
- ○ el interior del círculo, incluyendo el cero
- ○ Es una franja concéntrica

9. Si la señal de información (modulante) AM no incluye una constante (o valor de continua), entonces:

- ● Sucede un cambio de fase cuando cruza el cero
- ○ Se produce un aumento de amplitud cuando cruza el cero
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ Se transmite una señal de la misma frecuencia de la portadora mayor a las bandas laterales

11. La Transformada Z se puede considerar el resultado de:

- ● la aplicación de la transformada de Fourier a la expresión $x[n]r^{-n}$
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ el producto de dos señales discretas temporales
- ○ la aplicación de la transformada de Laplace a una señal contínua

1. El conjunto de coeficientes de una serie de fourier se denomina

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] coeficientes normalizados
- [x] coeficientes espectrales
- [ ] coeficientes mínimos

4. La Energía entre la señal y su transformada:

- [ ] Aumenta
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] Se conserva
- [ ] Se reduce

6. El fenómeno de Gibbs implica que:

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Un conjunto de señales finito puede representar cualquier señal periódica
- [x] La aproximación por serie de Fourier con componentes finitos no es exacta
- [ ] Solo se pueden representar señales senoidales con la serie de fourier

7. Una señal para la cual la salida del sistema es una constante multiplicada por la entrada es una:

- [ ] Función simétrica
- [ ] Función impropia
- [x] Función propia
- [ ] Ninguna de las demás respuestas

8. La Transformada de Fourier:

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] Se puede derivar de una Serie de Fourier considerando al periodo infinito
- [ ] Se puede calcular sólo para señales periódicas
- [ ] Es equivalente a la Serie de Fourier para señales aperiódicas

9. La transformada de Fourier de un producto temporal es:

- [x] La convolución en el dominio de la frecuencia
- [ ] Otro producto en el dominio de la frecuencia
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] La suma en el dominio de la frecuencia

11. Un conjunto de exponenciales complejas cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una fundamental se denominan:

- [x] armónicas
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] secuenciales
- [ ] simétricas

12. El desplazamiento y la derivación en el tiempo:

- [x] Son posibles en la transformada de Fourier
- [ ] No son posibles en la transformada de Fourier
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Son solo posibles con exponentes reales

1. Para que la serie de fourier se igual a la señal que descompone, debe tener:

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Solo las componentes impares de la serie de Fourier
- [x] Infinitas componentes
- [ ] Una cantidad de energía finita en la diferencia

8. Un filtro digital es intrínsecamente estable si es:

- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [x] FIR, Respuesta al Impulso Finita
- [ ] IIR, Respuesta al Impulso Infinita
- [ ] DFT, Transformada Discreta de Fourier

9. La transformada de Fourier de una convolución temporal es:

- [x] El producto en el dominio de la frecuencia
- [ ] La suma en el dominio de la frecuencia
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] El inverso en el dominio de la frecuencia

11. Una de las condiciones de convergencia de la serie de Fourier indica que:

- [x] La cantidad de máximos y mínimos en un periodo es finita
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] La función de transferencia tenga polos dentro de la ROC
- [ ] La señal deba estar definida dentro del circulo unidad

12. La transformada de Fourier de un producto temporal es:

- [x] La convolución en el dominio de la frecuencia
- [ ] La suma en el dominio de la frecuencia
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Otro producto en el dominio de la frecuencia

9. En la serie de Fourier, los coeficientes a_k representan

- [x] Cuánto contribuye una componente a la construcción de la señal original
- [ ] Los valores propios de la matriz de convergencia de la señal original
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] La secuencia de valores muestreados de la señal de entrada

10. Un filtro permite:

- [ ] Modificar frecuencia y fase de un conjunto de componentes
- [x] Modificar arbitrariamente amplitud y fase de un conjunto de componentes
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Modificar frecuencia y amplitud de un conjunto de componentes

11. La Energía entre la señal y su transformada:

- [x] Se conserva
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Aumenta
- [ ] Se reduce

12. Las componentes de la serie de Fourier son:

- [x] La fundamental y sus armónicas
- [ ] Sólo las armónicas
- [ ] Ninguna de las demás respuestas
- [ ] Las sub-armónicas y la fundamental

7. La serie contínua de Fourier se puede considerar el resultado de:

- [ ] el producto de dos señales discretas temporales
- [ ] la aplicación de la transformada Z a una señal contínua
- [x] un muestreo sobre la transformada de Fourier cuando la señal de entrada es periódica
- [ ] Ninguna de las demás respuestas

8. Una ecuación de diferencias en Z:

5. Un filtro IIR

- [x] Requiere utilizar las salidas anteriores
- [ ] Requiere solo las entradas anteriores
- [ ] Siempre es estable por definición
- [ ] Ninguna de las demás respuestas

12. El desplazamiento y la derivación en el tiempo:

- (●) Son posibles en la transformada Z
- ( ) No son posibles en la transformada Z
- ( ) Ninguna de las demás respuestas
- ( ) Son solo posibles con con señales senoidales

10. La transformada de Fourier de un desplazamiento en el tiempo t_0 es:

- ( ) $1 - e^{-j\omega t_0}$
- (●) $e^{-j\omega t_0}$
- ( ) Ninguna de las demás respuestas
- ( ) $\frac{1}{z^{t_0}}$

11. La Transformada Z se puede considerar el resultado de:

3. La transformada de Fourier de una cascada de funciones de transferencia temporales se representa como:

- ( ) Ninguna de las demás respuestas
- ( ) una traslación temporal
- (●) un producto
- ( ) una integral

4. La energía entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia

- ( ) No responde a ninguna relación física, es totalmente independiente.
- ( ) Ninguna de las demás respuestas
- (●) Se conserva
- ( ) Aumenta

7. La Transformada de Fourier:

- ( ) Es una función de la variable z
- ( ) Es discreta
- (●) Es continua
- ( ) Ninguna de las demás respuestas

3. La transformada de Fourier de una cascada de funciones de transferencia temporales se representa como:

- ( ) Ninguna de las demás respuestas
- ( ) una traslación temporal
- (●) un producto
- ( ) una integral

4. La convolución temporal en la Transformada de Fourier, se convierte en

- ○ Una derivada en frecuencia
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ● Un producto en frecuencia
- ○ Una integral en frecuencia

5. Los polos de una función de transferencia hacen al sistema en ese punto:

- ● inestable
- ○ estable
- ○ constante
- ○ Ninguna de las demás respuestas

2. La propiedad de la modulación implica que:

- ○ aparecen señales desplazadas a partir de un producto en frecuencia
- ○ no se alteran las señales
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ● aparecen señales desplazadas a partir de un producto temporal

7. La Transformada de Fourier:

- ○ Es equivalente a la Serie de Fourier para señales aperiódicas
- ○ Se puede calcular sólo para señales periódicas
- ● Se puede derivar de una Serie de Fourier considerando al periodo infinito
- ○ Ninguna de las demás respuestas

10. La transformada de Fourier de un impulso es:

- ○ Infinita
- ● Finita
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ Discreta

11. La serie contínua de Fourier se puede considerar el resultado de:

- ● un muestreo sobre la transformada de Fourier cuando la señal de entrada es periódica
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ el producto de dos señales discretas temporales
- ○ la aplicación de la transformada de Laplace a una señal contínua

12. El desplazamiento y la derivación en el tiempo:

- ● Son posibles en la transformada de Fourier
- ○ No son posibles en la transformada de Fourier
- ○ Ninguna de las demás respuestas
- ○ Son solo posibles con exponentes reales