

remember this:
Control N° 1

Apuntes Señales y Sistemas

Por Flavio Pallini Medina - Nicolás Araya
Profesor: Diego Dujovne

Septiembre de 2021

1. Introducción

Este documento corresponde a una colección de apuntes y ejercicios para el curso de Señales y Sistemas de la universidad Diego Portales, basados en el material desarrollado para las ayudantías.

Los contenidos de este curso son, en gran medida, una materialización de las matemáticas universitarias estudiadas hasta el momento, aplicándolas en el contexto de la ingeniería en telecomunicaciones. Parte importante del curso es familiarizarse no solo con las matemáticas que se realizan, sino con los modelos que éstas representan. Por lo tanto, es fundamental no quedarse sólo con los ejercicios y repases de este apunte, sino además estudiar de la bibliografía especificada en el programa del curso¹ y las diapositivas del profesor Dujovne.

2. Señales

Podemos definir una señal como una perturbación en un espacio con fin de transmitir información. Así, una señal puede abarcar cualquier cosa desde los símbolos de tránsito como una perturbación del campo visual, incluyendo los sonidos como una perturbación en la presión del aire, hasta la información en un flujo de bits en una computadora como una perturbación respecto a su cero. Más aterrizado, para analizar sistemas, nos interesa poder definir nuestras señales como funciones matemáticas, por lo que podemos pensar en las señales como funciones con un propósito.

2.1. Dominios y periodicidad

Al tener señales definidas matemáticamente, se pueden dividir las señales en dos grupos según la continuidad de su variable independiente:

- **Señales continuas:** cuando la señal es definida respecto a una variable independiente continua, normalmente representada con paréntesis redondos (e): $x(t)$, $y(t)$
- **Señales discretas:** cuando la variable independiente representa lapsos discretos, normalmente representada con paréntesis cuadrados (e): $x[n]$, $y[n]$

(Que una señal sea continua o discreta no limita los valores que puede tomar su variable dependiente. En general, estos valores van a ser números complejos, o cuanto menos reales.)

Por lo común, trabajaremos con señales definidas respecto al tiempo, representado por la letra t y paréntesis curvos cuando lo consideramos continuo, y por la letra n y paréntesis cuadrados cuando lo consideramos discreto; esto último modelando sistemas donde se actúa en ventanas específicas de tiempo, tales como sistemas digitales.

(También puede ser pertinente definir una función según variables espaciales o de otras características del sistema.)

Cuando podemos definir un tiempo T tal que $x(t) = x(t + kT)$ o un tiempo N tal que $x[n] = x[n + kN]$ para un $k \in \mathbb{Z}$ hablaremos de una señal periódica. (En estricto rigor, solo estas señales son periódicas, pero cuando podemos distinguir un comportamiento similar en un periodo T o N ; esto es, $x(t) \sim x(t + kT) \vee x[n] = x[n + kN]$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos decir que la señal está modulada con respecto a una señal periódica.) Toda señal definida por señales periódicas será periódica dado que exista un máximo común divisor para sus frecuencias ω (o, un mínimo común múltiplo para sus periodos T), y en

¹<http://eit.udp.cl/wp-content/uploads/2016/03/30-CIT2101-Se%C3%B1ales-y-Sistemas-2016-1.pdf>

caso de ser una señal discreta, este máximo común divisor sea un número racional, para corresponderse armónicamente con el muestreo.

2.1.1. Ejemplos

Graficar las siguientes funciones, y discutir periodicidad y discreción/continuidad.

1. $x(t) = t^2 - 1$ Función continua y aperiódica.

2. $x(t) = \sin(\pi t) + \cos(2\pi t)$ Función continua y periódica, con periodo:

$$\begin{aligned} \pi T_1 = 2\pi &\iff T_1 = 2 & 2\pi T_2 = 2\pi &\iff T_2 = 1 \\ T &= \text{mcm}(2, 1) = 2 \end{aligned}$$

3. $x[n] = e^{\frac{2}{11}\pi i n}$ Función discreta y periódica, con periodo:

$$\frac{2}{11}\pi N = 2\pi \iff N = 11$$

Otra forma de expresar la función es:

$$x[n] = e^{\frac{2}{11}\pi i n} = \cos\left(\frac{2}{11}\pi n\right) + i \sin\left(\frac{2}{11}\pi n\right)$$

4. $x(t) = t - |t|$ Función continua y periódica, con periodo $T = 1$.

5. $x(t) = \sin\left(\frac{4t}{3}\right) + \cos\left(\frac{7\pi t}{5}\right)$ Función continua y aperiódica. Si se busca el periodo, se ve que:

$$\begin{aligned} \frac{4T_1}{3} = 2\pi &\iff T_1 = \frac{3\pi}{2} & \frac{7\pi T_2}{5} = 2\pi &\iff T_2 = \frac{10}{7} \\ T &= \text{mcm}\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{10}{7}\right) = \emptyset \end{aligned}$$

6. $x[n] = i \cdot e^{3i\pi n}$ Función discreta y periódica, con periodo:

$$3\pi N = 2\pi \iff N = 2/3$$

Otra forma de expresar la función es:

$$\begin{aligned} x[n] &= i \cdot e^{3i\pi n} = i(\cos(3\pi n) + i \sin(3\pi n)) \\ &= x[n]i \cos(3\pi n) - \sin(3\pi n) \end{aligned}$$

7. $x(t) = e^{-(2+\pi i)t}$ Función continua y aperiódica, aunque modulada con respecto a un periodo de:

$$\pi T = 2\pi \iff T = 2$$

Otra forma de expresar esta función es:

$$x(t) = e^{-(2+\pi i)t} = e^{-2t}(\cos(\pi t) - i \sin(\pi t))$$

8. $x[n] = e^{\frac{3}{4}i\pi n}$ Función continua y periódica, con periodo:

$$\frac{3}{4}\pi T = 2\pi \iff T = \frac{8}{3}$$

Otra forma de expresar esta función es:

$$x[n] = e^{\frac{3}{4}i\pi n} = \cos\left(\frac{3}{4}\pi n\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi n\right)$$

9. $x[n] = e^{8i\pi n}$ Función continua y aperiódica. Si se trata de determinar su periodo, se ve que:

$$8N = 2\pi \iff N = \frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$$

Otra forma de expresar esta función es:

$$x[n] = e^{8i\pi n} = \cos[8\pi n] + i \sin[8\pi n]$$

10. $x(t) = e^{3(t-1)}$ Función continua y aperiódica.

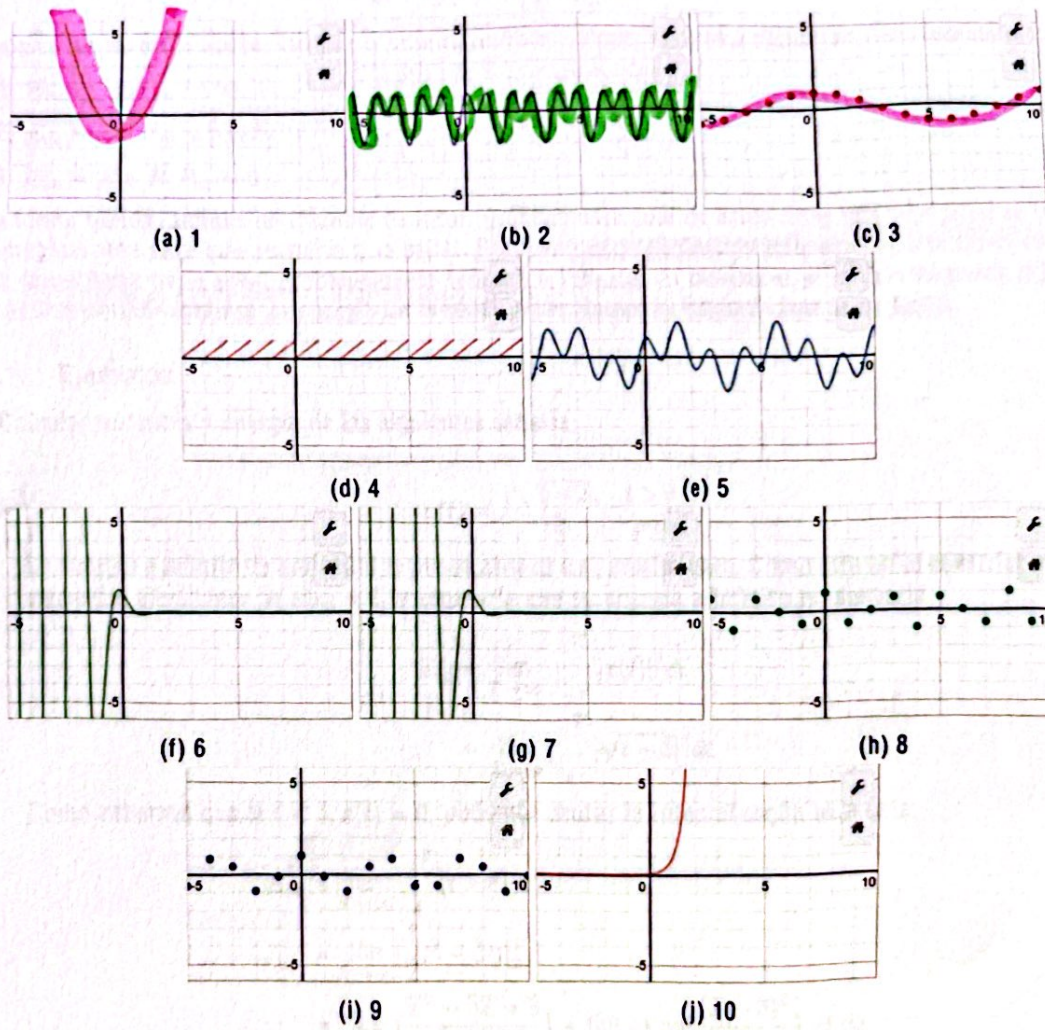


Figura 1: Gráficos de las señales anteriores

2.2. Potencia y energía

De los sistemas eléctricos, si bien aplicable a varios sistemas, nace la idea de caracterizar señales según su potencia consumida y energía requerida, en función de la señal de entrada del sistema (en sistemas eléctricos, el voltaje.) Según esta caracterización, la energía de una señal queda dada por:

$$E_{\Delta} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Y la potencia por:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

Según cuáles de estos valores tiendan a infinito junto al tiempo, podemos distinguir tres tipos de señales:

1. $E_{\infty} \rightarrow \infty, P_{\infty} \rightarrow \infty$
2. $E_{\infty} \rightarrow \infty, P_{\infty} = p \in \mathbb{R}$
3. $E_{\infty} = E \in \mathbb{R}, P_{\infty} = 0$

Una forma rápida, aunque no infalible de intuir gráficamente cuál de estos tipos será una señal es tratar de imaginar una caja que envuelva a la señal. Si no se puede contener verticalmente a la señal en una caja, la potencia de la señal probablemente tenderá a infinito. Al contrario, si la caja se puede dibujar con ambos bordes laterales, la energía de la señal probablemente tenderá a un valor finito.

2.2.1. Ejemplos

Calcular potencia y energía de las siguientes señales:

1.

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{t-3}, & t \geq 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La energía a infinito de una señal se puede asociar a su crecimiento. Como esta señal es estrictamente creciente, alejándose de $x[n] = 0$ se esperaría que su energía a infinito no converja.

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_3^T |\sqrt{t-3}|^2 dt$$

Como sabemos que si $t < 3, x(t) = 0$, podemos acotar la integral según esta cota.

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_3^T (t-3) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} t^2 - 3t \right) \Big|_3^T$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{T^2 - 6T + 9}{2} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{(T-3)^2}{2} \right) \rightarrow \infty$$

Se revisa ahora si la potencia a infinito es acotada desde la expresión para energía y usando L'Hopital. Como la señal es estrictamente creciente, y sin ningún límite de crecimiento ni asíntota, se esperaría que su potencia también tienda a infinito.

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{(T-3)^2}{4T} \right)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{2(T-3)}{4} \right) \rightarrow \infty$$

Se comprueba así que la potencia a infinito también tiende a infinito.

2.

$$x[n] = e^{j\pi n}$$

$$\frac{1}{8}\pi = 2k\pi \iff n = 16k$$

Esta señal es periódica con periodo 16, con comportamiento acotado entre $-1 \leq x[n] \leq 1$. Se espera que a infinito tenga energía infinita, pero potencia finita.

Se calcula primero su potencia y energía para un único periodo:

$$E_{\Delta} = \sum_{k=0}^{15} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{15} |e^{j\pi n}|^2 = \sum_{k=0}^{15} 1 = 16$$

Como la exponencial compleja representa rotaciones en un círculo unitario en el plano complejo, su módulo va a ser 1 para todo punto en el periodo, simplificándose la función como se ve. La energía asociada a sólo la parte real es 8.

Su potencia en el periodo sería entonces 1.

$$P_{\Delta} = \frac{E_{\Delta}}{n_2 - n_1 + 1} = \frac{16}{15 - 0 + 1} = 1$$

Extrapolando estas funciones a infinito se comprueban las conjeturas iniciales.

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} (2N + 1) \rightarrow \infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{k=-N}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N + 1}{2N + 1} \rightarrow \infty$$

3.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-6t}, & t \geq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Esta señal está acotada por un lado y es absolutamente decreciente hacia el otro, por lo que es de esperar que su energía tienda a un valor finito.

$$\begin{aligned} E_{\infty} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T |e^{-6t}|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T e^{-12t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{12} e^{-12t} \Big|_1^T \right) \\ &= \frac{e^{-12}}{12} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{12} e^{-12T} \\ &= 5,12 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Si la señal tiene energía finita a tiempo infinito, su potencia debe ser cero, por lo que no hace falta calcularla realmente.

$$\begin{aligned} P_{\infty} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_1^T |e^{-6t}|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\frac{e^{-12}}{12} - \frac{1}{12} e^{-12t} \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-12}}{24T} - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{24T e^{12T}} = 0 \end{aligned}$$

3. Sistemas

Podemos definir un sistema como cualquier caja negra. La que teniendo una señal de entrada x recibamos una señal de salida y .

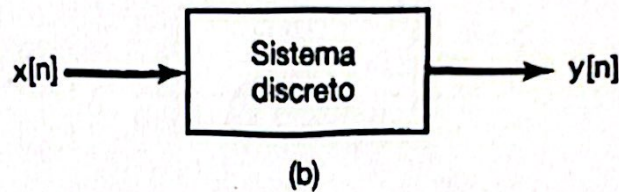
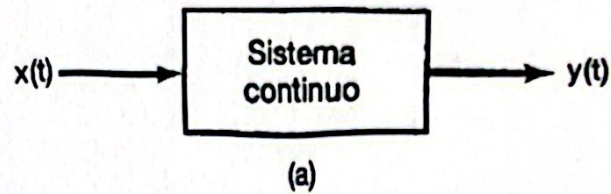


Figura 2: Representación de sistemas

3.1. Propiedades de un sistema

- **Causal:** El sistema considera sólo valores de entrada presentes y pasados. Cualquier sistema que trabaje en tiempo real va a ser causal. (Sistema causal – Sistema no causal.)
- **Con Memoria:** El sistema considera entradas y salidas presentes y pasadas. Todo sistema causal tiene memoria, y ningún sistema con memoria no causal trabaja en tiempo real. (Sistema con memoria – Sistema sin memoria.)
- **Variable:** Diferentes momentos en el tiempo interpretan la señal de forma diferente.
- **Invertible:** Para un sistema invertible, existe otro sistema inverso tal que, si una entrada produce una salida en el primero, ingresar esa salida como entrada en el segundo produce la entrada original. Conceptualmente, es la misma propiedad que poseen las funciones biyectivas. Cabe distinguir porque los sistemas no necesariamente se definen con funciones.
- **Estable:** Para entradas acotadas, el sistema entrega salidas acotadas. (Sistema estable – Sistema inestable)
- **Linealidad:** La suma de dos salidas es equivalente a la salida de la suma de dos entradas.

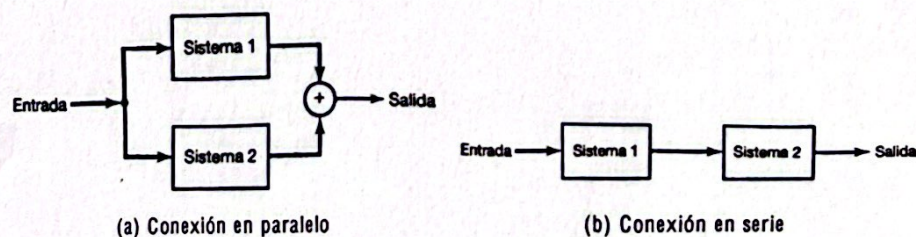


Figura 3: Interconexión de sistemas