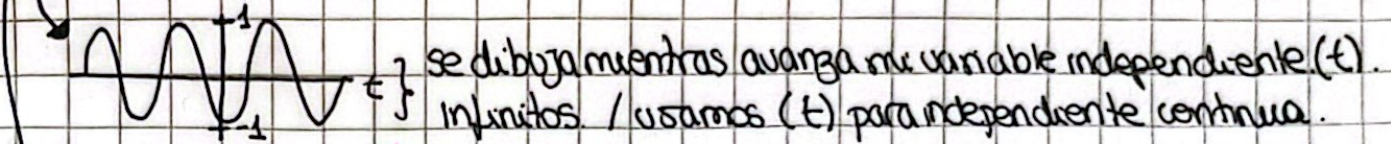


Señales y sistemas: (se representan funciones de una o mas variables independientes)

Señales discretas: la variable independiente esta definida solo en tiempos discretos.

Señales continuas: responde a una sucesión de valores reales de la variable independiente



Para calcular en discretas es $\sum$ y en continuas es $\int_{-\infty}^{\infty}$ en la $x(t)$ o $x[n]$ segun corresponda.

para casos infinitos, con cuidado, ya que en continuo se esha y se va al infinito y para discreta lo mismo tiende a infinito solo si las expresiones ($\int$ y $\sum$) no convergen.

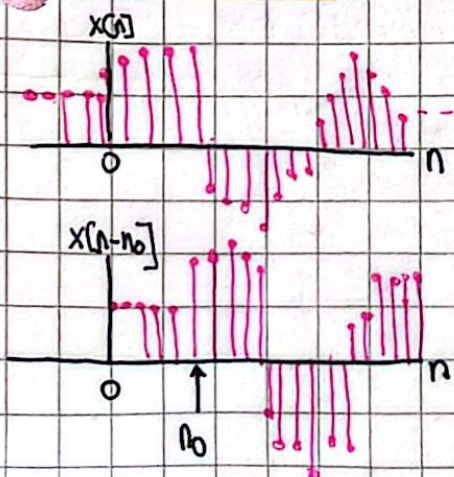
3 tipos de señales

- energía finita: señal que dura un tiempo y nunca mas ($\square$)
- energía total finita: su potencia da 0.
- potencia promedio finita: con $P_{av} < \infty$ pero si $P_{av} > 0$ entonces $E_{\infty} = \infty$.
- potencia y energía infinitas: Ej ($x(t) = t$) señal que lo unico que hace es crecer.

Transformaciones variable independiente

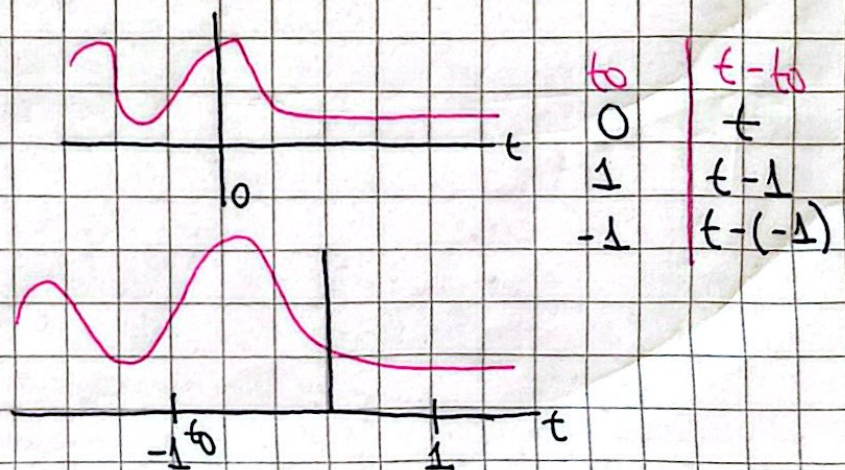
- comiendo en el tiempo.
- señal $x[n]$ y $x[n - n_0]$, misma señal pero desplazada en el tiempo.

CASO DISCRETO: (t discreto)



CASO CONTINUO: (t continuo)

- $t > 0$ atrasada, $t < 0$ adelantada.



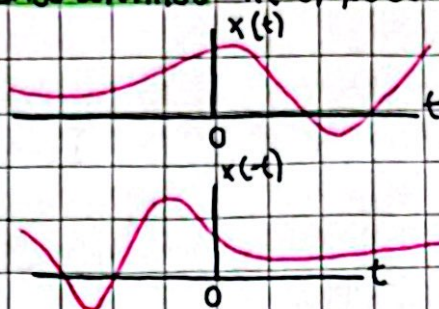
reflexión al rededor de $n=0$.

la señal $x[-n]$ se obtiene $x[n]$ reflejada.

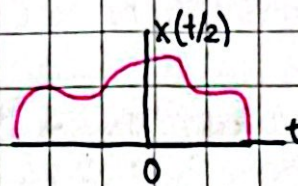
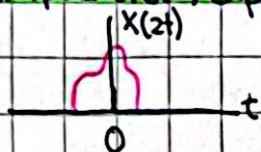
CASO DISCRETO



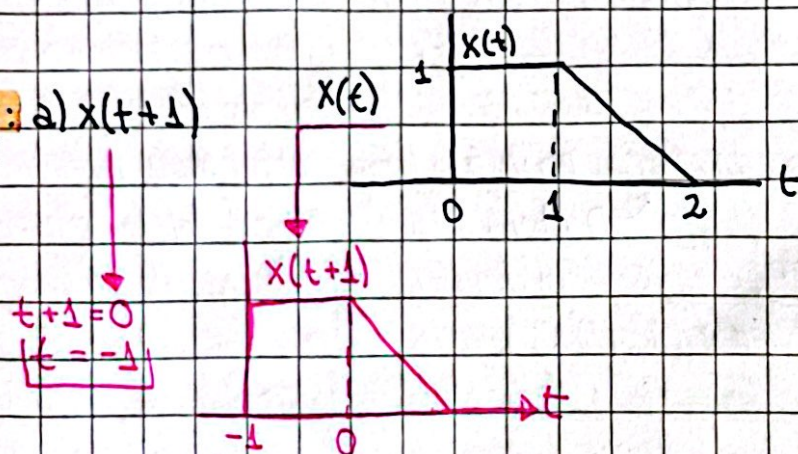
CASO CONTINUO: $x(-t)$ se obtiene $x(t)$



escalamiento en el tiempo: compresión / expansión

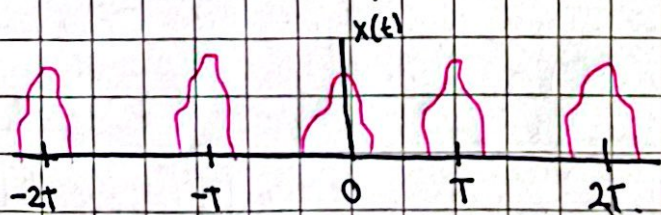


Ej: a) $x(t+1)$



Señales periódicas:

→ existe un valor positivo tal que si sumamos ese T aparece en el tiempo la misma señal.



→ misma señal distinto comienzo.

→ Período fundamental: el periodo mas pequeño, sea lo minimo para el cual se cumple la condición.

→ señal constante $\neq$ señal periódica, sea se podría denominar aperiódica.

→ señales discretas $x[n] = x[n+N]$ y su periodo fundamental es N_0 .



} 2 hacia arriba, uno hacia abajo, etc.

→ Señales pares e impares:

• Simetría con inversión de tiempo es propiedad útil.

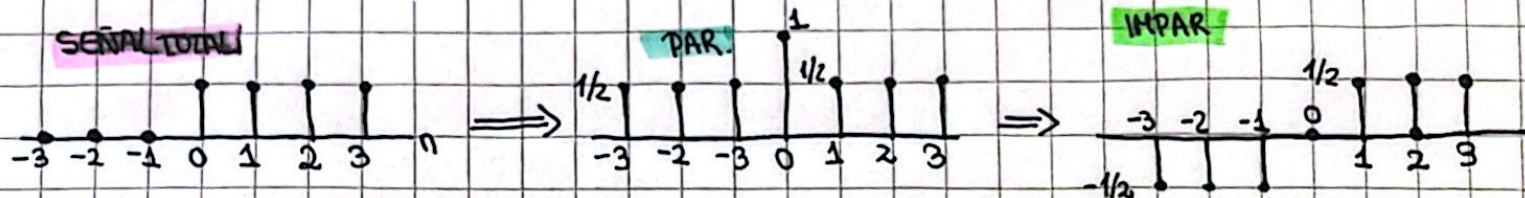
• Es par si $x(-t) = x(t)$; $x[-n] = x[n]$.

• Es impar si $x(-t) = -x(t)$; $x[-n] = -x[n]$.

• Para calcular parte par/impar:

$$\text{Par} = \text{Ev}[x(t)] = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] ; \text{impar} = \text{Od}[x(t)] = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

• descomposición de una señal en par e impar:

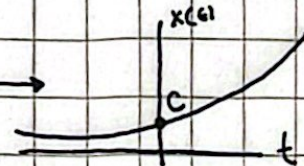


→ Señal continua exponencial compleja y senoidal:

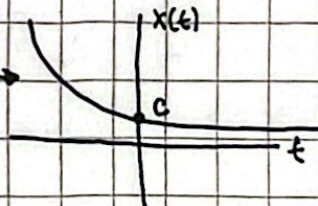
• exponencial compleja: $x(t) = C e^{at}$, donde C son los números complejos.

CASO 1: C y a son reales → exponencial real.

$a > 0$ →



$a < 0$ →



CASO 2: C real igual a 1, a complejo:

se tiene que $e^{j\omega_0 t} = 1$ para $T_0 = 2\pi / |\omega_0|$ → $x(t) = e^{j\omega_0 t}$.

→ La señal sinusoidal está relacionada con la exponencial compleja $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi)$.
conten segundos, ϕ en radianes y ω_0 en radianes por segundo dando $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$, con f_0 en Hz siendo periódico, con periodo T_0 .

→ se puede escribir una señal exponencial en parte real e imaginaria

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \cdot \text{Re}[e^{j(\omega_0 t + \phi)}] , A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \cdot \text{Im}[e^{j(\omega_0 t + \phi)}]$$

periodo fundamental es T_0 y es inversamente proporcional a $|\omega_0|$ → frecuencia fundamental.

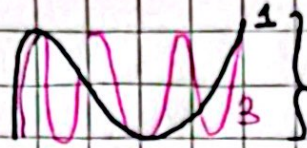
→ señal constante no tiene periodo y su frecuencia fundamental es 0.

→ señales sinusoidales tienen energía infinita y potencia finita.

→ al ser periódica la energía total en cada periodo es la misma y su potencia promedio es 1.

Señales armónicamente relacionadas:

→ todas comparten el mismo periodo fundamental T_0 , con $e^{j\omega_0 t} = 1$ y $\omega_0 T_0$ tiene que ser múltiplo de 2π .



misma periodo fundamental,
distinta señal.

Señal exponencial compleja general:

→ señal: $C = e^{at}$

con euler: $C \cdot e^{at} = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$

con $r > 0$ exponencial creciente; $r < 0$ exponencial decreciente.

Señales discretas exponencial compleja y senoidal:

→ $x[n] = Ca^n$ = exponencial compleja, donde C y a son complejos y se expresa de $x[n] = Ce^{j\omega_0 n}$

→ C y a reales, $|a| > 1$ crece exponencialmente; $|a| < 1$ decrece exponencialmente;

$a > 1$, valores positivos; $a < 1$ valores $\pm$ y si $a = 1$, $x[n]$ es constante; $a = -1$, $x[n]$ entre $+C$ y $-C$.

Señales discretas senoidales:

→ señal sinusoidal se obtiene cuando B es imaginaria con $|a| = 1$, $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, tiene energía infinita con potencia promedio finita dado $|e^{j\omega_0 n}| = 1$.

Señales discretas exponenciales generales:

$C = |C|e^{j\theta}$, $a = |a|e^{j\omega_0}$ se generan 3 casos:

$|a| = 1$, senoidal constante; $|a| > 1$, senoidal con envolvente exponencial creciente, $|a| < 1$ exponencial decreciente.

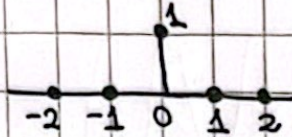
→ periodicidad de senoidales discretas:

- $e^{j\omega_0 n}$, cuanto mas alto ω_0 , mayor es la frecuencia de la señal.
- Por ende, las señales aumentan su velocidad de oscilación desde 0 hasta $\omega_0 = \pi$, pero desde $\omega_0 = \pi$ - $\omega_0 = 2\pi$ disminuyen, por ende, las bajas frecuencias están cerca de 0 y $\pm 2\pi$, mientras que las altas frecuencias se encuentran cerca de $\omega_0 = \pm \pi$.
- periodo fundamental se expresa como $N = m \left(\frac{2\pi}{\omega_0} \right)$

Funciones impulso y escalón:

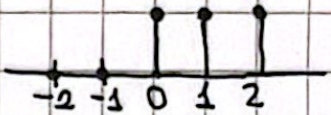
Caso discreto: impulso unitario

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



escalón unitario:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$$



derecha
→

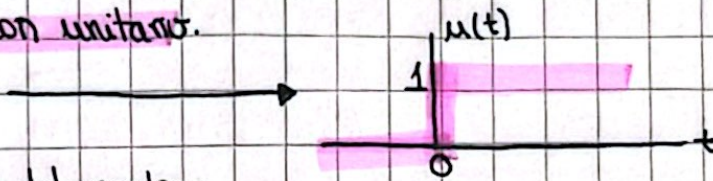
→ impulso unitario es la primera diferencia del escalón discreto: $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$.

→ se usa la expresión:

$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$, ya que $k = n-m$, por ende $m = n-k$, corresponde a una superposición de impulsos retrasados, $\delta[n]$ en $n=0$, $\delta[n-1]$ en $n=1$, así sucesivamente.

→ versión continua del escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



• corresponde a la integral del impulso;

→ $\delta(t)$, llamada Delta de Dirac, no tiene duración, sino área unitaria, se simboliza con una ↑.

$$x(t) \delta(t-t_0) = x(t_0) \delta(t-t_0), \text{ en cualquier } t_0$$

Sistemas continuos y discretos:

→ sistema: proceso en el que las señales de entrada son transformadas o provocan que responda de alguna forma dando otras señales como salidas.

→ sistema continuo: $x(t) \rightarrow y(t)$; señales continuas de entrada en señales continuas de salida.

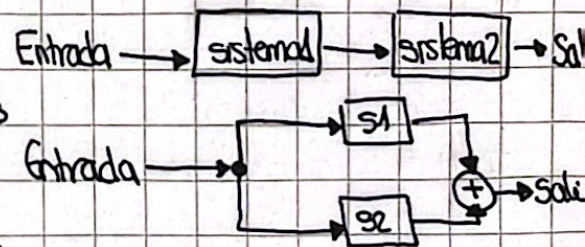
→ sistema discreto: $x[n] \rightarrow y[n]$; señales discretas de entrada en señales discretas de salida.

→ interconexión de sistemas:

• En serie: la salida de S_1 es la entrada de S_2

• En paralelo: la misma señal se aplica en ambos sistemas y se suman las salidas.

• pueden existir sistemas combinados (en serie/paralelo).



Propiedades de los sistemas:

• con memoria: su salida depende de la entrada en el mismo tiempo y/o de las anteriores o/y futuras.

• sin memoria: si su salida depende solamente de la entrada en ese mismo lugar.

- **sistemas inversos (e invertibles)**: distintas entradas producen distintas salidas, por ende, un sistema es invertible cuando existe un sistema inverso que colocado en cascada con el original, produce una salida igual a la entrada inicial.
- **causalidad**: su salida en cualquier instante de tiempo depende solo de los valores de entrada en el momento presente y pasado. El sistema no anticipa valores futuros de la entrada.
- **estabilidad**: un sistema es estable cuando entradas pequeñas hacen que la salida no diverja; esta relacionada a sistemas que disipan energía. Por ende, un sistema es estable cuando dada una entrada limitada, la salida también es limitada.
- **invariancia en el tiempo**: es invariante cuando el comportamiento y las características del sistema están fijos en el tiempo.
- **linealidad**: un sistema es lineal si posee la propiedad de superposición: si una entrada es una suma ponderada de varias señales, entonces la salida es la superposición de las respuestas del sistema a cada una de estas señales.

Representación de señales como suma de impulsos:

→ se puede escribir como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

combinación lineal de impulsos unitarios desplazados $\delta[n-k]$, donde los pesos son $x[k]$

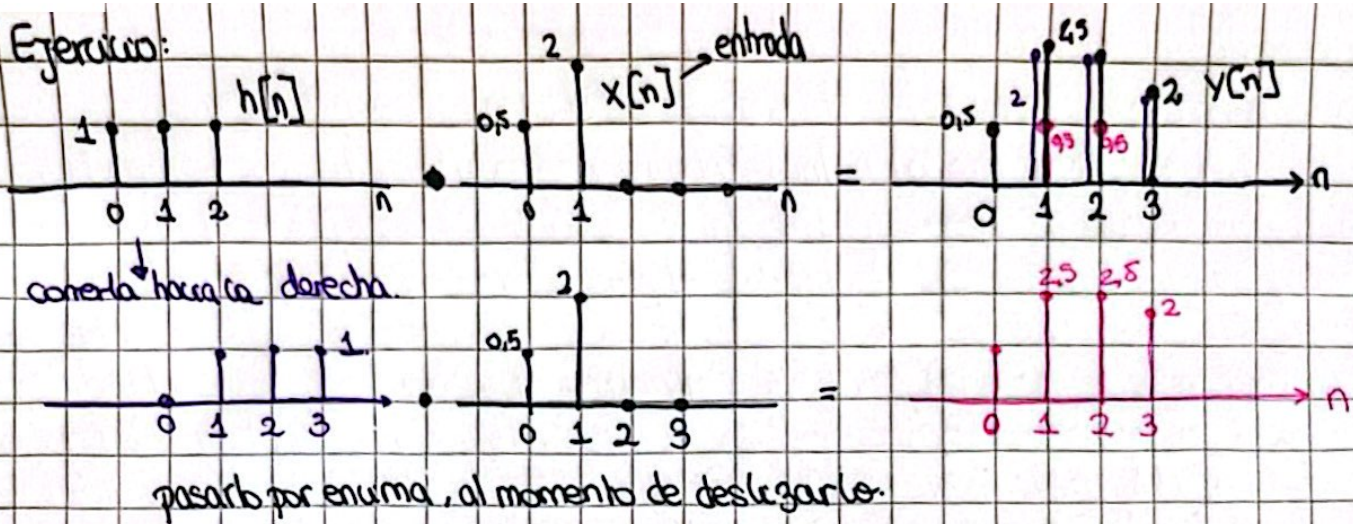
→ La propiedad de la selección (multiplicar la señal por un $\delta[n-k]$ para seleccionar el k -ésimo elemento), permite reconstruir la señal en función de señales más simples.

- la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo será la superposición de las respuestas escaladas del sistema a cada uno de esos impulsos.
- Para aplicar descomposición debe ser lineal y para la respuesta desfasada sea válida en el tiempo, debe ser invariante en el tiempo.
- $h[k]$ es la respuesta de un sistema, a una entrada $x[n]$ arbitraria, y la propiedad de la superposición en el sistema lineal hace que $y[n]$ sea la combinación lineal ponderada de estas respuestas básicas.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n]$$

- Para un sistema lineal e invariante en el tiempo, se denomina **suma de convolución** y se representa mediante: $y[n] = x[n] \bullet h[n]$.

Ejercicio:



→ en caso continuo, se usa una aproximación de $\delta(t)$ de la función $x(t)$, que se aproxima como una suma de impulsos rectangulares retrasados escalados.

→ respuesta al impulso unitario / integral de convolución.

• la respuesta $y(t)$ de un sistema lineal a la señal de entrada $x(t)$ será la superposición de versiones escaladas y desplazadas de $h(t)$, si $\Delta \rightarrow 0$ se aproximan a sus versiones continuas ($x(t)$, $y(t)$).

• $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \rightarrow$ equivalente a una + de impulsos ponderados desplazados.

Propiedades SLT: sistemas lineales invariante en el tiempo.

• propiedad conmutativa: $x(t) \cdot h(t) = h(t) \cdot x(t)$

• propiedad distributiva: $x(t) \cdot [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) \cdot h_1(t) + x(t) \cdot h_2(t)$

• ambas propiedades: $[x_1(t) + x_2(t)] \cdot h(t) = x_1(t) \cdot h(t) + x_2(t) \cdot h(t)$

• propiedad asociativa: $x(t) \cdot [h_1(t) \cdot h_2(t)] = [x(t) \cdot h_1(t)] \cdot h_2(t)$

• sistemas sin memoria, solo depende del estado actual de la entrada, la convolución se reduce a $y(t) = Kx(t)$, si $K=1$ son sistemas identidad.

• causalidad: $y[n]$ no debe depender de $x[k]$ para $k > n$, $h[n] = 0$ para $n < 0$.

• estabilidad: entrada limitada, produce salida limitada, entonces $y[n]$ está limitada en magnitud y es estable, si la respuesta al impulso es absolutamente sumable.

• respuesta al escalón unitario $u[n]$ o $u(t)$: se puede deducir la respuesta al escalón de un SLT discreto es la suma acumulativa de su respuesta al impulso, y es la primer diferencia de su respuesta escalón.

Transformación de Fourier:

- representación distinta a la suma impulsos escalados y desfasados, es mediante la combinación lineal de un conjunto de señales básicas (exponenciales complejas).
- se representan así:
continua: $e^{st} \rightarrow H(s) e^{st}$; $z^n = H(z) z^n$, donde $H(s)$ y $H(z)$ dependen de las variables complejas s y z .
- Suponiendo que e^{st} converge, entonces la respuesta es: $y(t) = H(s) e^{st}$, donde $H(s)$ es una constante compleja que depende de s .
- Para las expo discretas tipo $x[n] = z^n$, aplicando convolución, si la suma a la derecha converge, entonces la salida es $y[n] = H(z) z^n$, donde la constante $H(z)$ es un valor propio asociado a la función.
- Para analizar la transformada de Fourier conviene descomponer las señales exponenciales complejas como una combinación lineal de ellas y por superposición construir la salida.
- Ej: $y(t) = x(t-3)$ que se puede representar como:
 $y(t) = e^{j2(t-3)} = e^{-j6} \cdot e^{j2t}$
La función propia es e^{j2t} y el valor propio asociado es $H(j2) = e^{-j6}$
- Para una señal periódica si existe un T tal que $x(t) = x(t+T)$ para todo t y el periodo fundamental es el mínimo T positivo que cumple esta condición y el valor $\omega_0 = 2\pi/T$ es la frecuencia fundamental.
- Para las exponenciales complejas relacionadas armónicamente:
 $e^{jk\omega_0 t} = e^{j k (2\pi/T) t}$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
tienen cada una de ellas una frecuencia que es múltiplo de la frecuencia fundamental ω_0 y c/u es periódica con periodo T , por ende una combinación lineal de exponenciales periódicas también tiene periodo T .
- Otra forma de representar la señal es a través del complejo conjugado.
 $x^*(t) = x(t) \rightarrow x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t]$

Cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier:

- Resumiendo:
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j k (2\pi/T) t} dt$$

y cada coeficiente pondera la contribución de cada una de las exponenciales complejas a la señal de entrada

- coeficiente a_0 corresponde a la componente de frecuencia cero o de continua, que es el ~~promedio~~ promedio de la señal en un periodo.

→ convergencia de la serie de Fourier:

- corresponde al error de aproximar una señal periódica con una cantidad finita de exponenciales complejas, una forma de cuantificar el error es utilizando la energía del error en el periodo:

Para minimizar la energía del error, se debe usar los coeficientes que se calculan como $a_k = 1/T \int x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$ (coeficientes de la serie de Fourier).
al aumentar N , el error E_N disminuye.

Esta integral puede diverger, o sea $a_k = \infty$ o dado a_k finitos si se los aplica a la representación final de la ecuación esta también puede divergir.

- Para el caso de las discontinuas se puede analizar a través de la energía y luego generalizar para un conjunto de condiciones. A medida que aumentamos N , el error disminuye, y $x(n)$ sean iguales, solo que hay energía en la diferencia. Pero para garantizar la convergencia, se utiliza un grupo más estricto de condiciones, denominadas **condiciones de Dirichlet**.

C1: sobre cualquier periodo T , $x(t)$ debe ser absolutamente integrable.

C2: La variación de $x(t)$ en cualquier intervalo finito de tiempo está acotado, esto es, la cantidad de máximos y mínimos en un periodo es finita.

C3: En cualquier intervalo de tiempo solo hay un número finito de discontinuidades, y cada una de estas debe ser finita.

Fenomeno de Gibbs:

- dice que no importa la cantidad de N terminos que se utilicen, la aproximación para una señal cuadrada tiene un sobrepaso de 9% en la discontinuidad.

Propiedades de la serie continua de Fourier:

- Para relacionar las señales $x(t)$ con sus coeficientes de Fourier a_k se escribe,

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

- Linealidad: siendo $x(t)$ e $y(t)$ señales, cuyos coeficientes son a_k y b_k

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k ; y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$$

como ambas tienen periodo T , entonces cualquier combinación lineal de ambas también tendrá periodo T .

- **desplazamiento en el tiempo:**

cuando se aplica a una señal periódica, se conserva el periodo T de la señal.

Por ende, decimos que si: $x(t) \xrightarrow{FS} a_k$, la expresión queda

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k \text{ y el desplazamiento no afecta el modulo: } |b_k| = |a_k|$$

- **Inversión en el tiempo:** el periodo T no varía cuando se realiza una inversión del tiempo.

Por ende, si $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$, entonces: $x(-t) \xleftrightarrow{FS} a_{-k}$

La inversión del tiempo aplicada a una señal continua resulta en una inversión de tiempo en las secuencia de los coeficientes de la serie de Fourier.

Si la función $x(t)$ es par, los coeficientes de la serie igual son pares $a_{-k} = a_k$, en cambio,

si la función $x(t)$ es impar, los coeficientes de la serie son impares $a_{-k} = -a_k$.

- **escalamiento de tiempo:** Si $x(t)$ es periódica con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$, entonces $x(\alpha t)$ donde α es real positivo, es periódica, con periodo T/α y frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$ y los coeficientes de la serie de Fourier siguen siendo los mismos

- **multiplicación:** supongamos dos señales $x(t)$ e $y(t)$, ambas con periodo T y que $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$, $y(t) \xleftrightarrow{FS} b_k$, como el producto $x(t)y(t)$ también es periódico con periodo T los coeficientes h_k de este producto quedan $x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$.

- **conjugado y simétrico conjugado:** el complejo conjugado de una señal periódica $x(t)$, tiene el efecto de la inversión temporal si: $x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$. Si $x(t)$ es real $x(t) = x^*(t)$, entonces $a_{-k} = a_k^*$ se denominan simétricos conjugados

- **Relación de Parseval:** dice que la potencia promedio total de una señal periódica es igual a la suma de las potencia promedio en todos sus componentes armónicos.

Representación en Series de Fourier de señales periódicas discretas:

• lo que entrega el par de la serie de Fourier discreta:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 t} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Propiedades de la serie discreta de Fourier:

- **Multipliación:** tomando dos señales, $x[n]$ e $y[n]$ tales que:

$x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$, $y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$, ambas con periodo N y sus coeficientes d_k están dados por:

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{FS} d_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

La diferencia es que radica en que ahora se toma un número finito N de muestras, esto se denomina convolución periódica.

- **Primera diferencia:** la diferenciación continua se traslada al campo discreto como primera diferencia, definida como $x[n] - x[n-1]$. Por ende, la primera diferencia tiene como serie discreta de Fourier:

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{FS} (1 - e^{-jK(2\pi/N)}) a_k$$

- **Relación de Parseval:** la potencia promedio de una señal periódica es igual a la suma de las potencias promedio de todas sus componentes armónicas, en especial como el caso discreto trayendo N componentes dado que los coeficientes son periódicos, se puede hacer sobre cualquier grupo de N de valores consecutivos de k .

Filtrado:

Un filtro es un sistema que cambia las magnitudes y/o fases de las componentes de un sistema.

→ Existen filtros analógicos y digitales.

→ Filtros selectivos en frecuencia, se usan para permitir el paso de algunas bandas de frecuencia y rechazar otras.

→ se pueden clasificar según la banda que deje pasar o rechace.

(filtro pasabajos, pasabajas, pasabandas, rechazabanda).

- Un filtro pasabajos con frecuencia de corte ω_c es un sistema LTI que deja pasar todas las exponenciales complejas $e^{j\omega t}$ para ω entre $-\omega_c \leq \omega \leq \omega_c$ y elimina las demás frecuencias.

- Con las frecuencias bajas cerca de los múltiplos pares de π y las frecuencias altas cerca de los múltiplos impares de π .

→ **Filtros discretos**: se definen a partir de ecuaciones de diferencias y su comportamiento se clasifica en filtros de respuesta infinita al impulso y filtros de respuesta finita al impulso

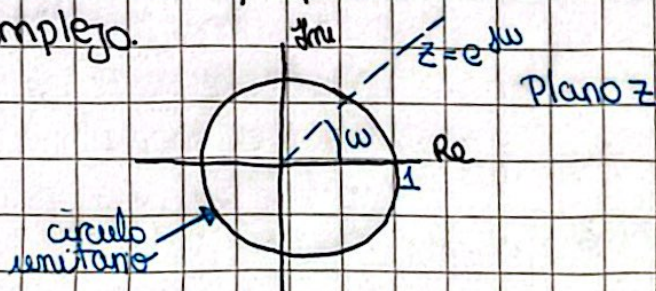
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

→ valores positivos $a < 1$ se comporta como pasabajos, para valores negativos de $a \leftarrow -1$ se comporta como pasaaltos, el valor de $|a|$ define el ancho de banda de paso.

• se puede deducir entonces que el factor a también influye en la velocidad del filtro en alcanzar su valor de régimen, siendo, más rápido para aquel valor más pequeño de a . **Sistema inestable para valores de $|a| \geq 1$.**

La transformada Z

→ La transformada Z se reduce a la transformada de Fourier cuando Z es unitaria ($z = e^{j\omega}$), equivalente a un círculo con radio unitario en el plano complejo.



→ Para que la transformada Z converja, la transformada de Fourier de $x[n]r^{-n}$ converja, si la región de convergencia incluye el círculo unitario entonces la transformada de Fourier también converge.

Ej 1: Partimos de la base de la zenal: $x[n] = a^n u[n]$.

La transformada Z es $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$

La convergencia se da con la condición: $\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$

esperamos que converja, para valores $|az^{-1}| < 1$ o $|z| > |a|$.

resolviendo:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

Y la región de convergencia (ROC) de la transformada Z de la expresión anterior se define por $|z| > |a|$, Haciendo $a=1$ se obtiene la transformada del escalon unitario: $X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$.

• Para señales que valen 0 para $n < 0$, solo existen potencias negativas de z , entonces, resulta mas comodo expresar el polinomio en potencias negativas de z : z^{-1} . Sin embargo, las raíces de los polinomios se expresan en z , mas aún se representan en z con:

- polos en el infinito con el grado del numerador mayor al de denominador.
- Ceros en el infinito con el grado del denominador mayor al del numerador.

Condiciones de Convergencia de la transformada Z :

Propiedad 1: La ROC de $x(z)$ consiste en un anillo en el plano z centrado alrededor del origen, basado en que la ROC esta formada por los valores de $z = re^{j\omega}$ para los cuales $x(n)r^{-n}$ tiene una transformada de Fourier que converge, entonces la convergencia depende solo de $r = |z|$ y no de ω .

Propiedad 2: La ROC no tiene ningún polo, consecuencia de que la $X(z)$ no converge en los polos.

Propiedad 3: Si $x[n]$ es de duración finita, entonces la ROC es el plano z completo, excepto en $z=0$ y/o $z=\infty$.

Propiedad 4: Si $x[n]$ es una secuencia derecha y si el círculo $|z| = r_0$ esta en la ROC, entonces todos los valores finitos de z para los cuales $|z| > r_0$ tambien estaran en la ROC.

Propiedad 5: Si $x[n]$ es una secuencia izquierda y si un círculo $|z| = r_0$ esta en la ROC, entonces todos los valores de z para los cuales $0 < |z| < r_0$ tambien estaran en la ROC.

Propiedad 6: Si $x[n]$ es bilateral y si el círculo $|z| = r_0$ esta en la ROC, entonces esta consistira de un anillo en el plano z que incluya al círculo $|z| = r_0$.

Propiedad 7: Si la transformada de $X(z)$ de $x[n]$ es racional, entonces su ROC esta limitada por polos o se extiende al infinito.

Propiedad 8: Si la transformada $X(z)$ de $x[n]$ es racional y si $x[n]$ es derecha, entonces la ROC es la región en el plano z fuera del polo mas alejado, es decir, fuera del círculo de radio igual a la magnitud mas grande de los polos $X(z)$. Además, si $x[n]$ es causal, entonces la ROC tambien incluye a $z = \infty$.

Propiedad 9: Si la transformada z $X(z)$ de $x[n]$ es racional, y si $x[n]$ es izquierda, entonces la ROC es la región del plano z dentro del polo diferente de cero más interno, es decir, dentro del círculo de radio igual a la magnitud más pequeña de los polos de $X(z)$ diferentes de cualquiera que se encuentre en $z=0$, y se extiende hacia el interior incluyendo posiblemente a $z=0$.

→ Linealidad:

Si $x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{S}} X_1(z)$, con $ROC = R_1$; $x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{S}} X_2(z)$, con $ROC = R_2$.

entonces:

$ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$, con la ROC conteniendo a $R_1 \cap R_2$.

- Si los polos y ceros de ambas transformadas no coinciden, entonces la ROC es la intersección exclusivamente. Si hay polos ceros se cancelan, la ROC puede ser mayor.

→ Convolución:

Si $x_1[n] \longleftrightarrow X_1(z)$, con $ROC = R_1$; $x_2[n] \longleftrightarrow X_2(z)$, con $ROC = R_2$.

entonces: $x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z) X_2(z)$

- Si los polos y ceros de ambas transformadas no coinciden, entonces la ROC es la intersección exclusivamente. Si hay polos y ceros que se cancelan, la ROC puede ser mayor.

→ diferenciación en el dominio z :

Si $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{S}} X(z)$, con $ROC = R_1$, entonces:

$n x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{S}} -z \frac{dX(z)}{dz}$, con $ROC = R$.

→ Ecuaciones en diferencias y transformada z :

- una ecuación de diferencias tiene transformada z que es racional, agregando condiciones de causalidad y estabilidad, entonces se define la ROC, si es causal, la ROC estará fuera del polo más externo.

Análisis de señales en el dominio del tiempo:

- Las señales aleatorias a diferencia de las deterministas, se utilizan para transmitir información:
- Un proceso aleatorio real (o proceso estocástico) es un conjunto indexado de funciones reales de algún parámetro, generalmente el tiempo, que posee ciertas propiedades estadísticas
- $V(t, E_1)$ es una forma de onda, otra posible es $V(t, E_2)$
en general $V(t, E_i)$ es la forma de onda que se obtiene cuando sucede el evento E_i del espacio de muestra. Entonces $V(t, E_i)$ es una función muestral del espacio de muestra.
- El conjunto de todas las posibles funciones muestrales $\{V(t, E_i)\}$, se conoce como conjunto y define un proceso aleatorio $V(t)$, que describe a la fuente de ruido.
los eventos $\{E_i\}$ se asignan a un conjunto de funciones $\{V(t, E_i)\}$, esta colección de funciones es el proceso aleatorio $V(t)$.
- Un proceso aleatorio: puede describirse mediante un conjunto indexado de variables aleatorias. $V_1 = V(t_1)$, donde $V(t)$ es un proceso aleatorio:
 - proceso aleatorio continuo: tienen variables aleatorias continuamente distribuidas asociadas al mismo de la forma $V_j = V(t_j)$, ej: ruido en los circuitos
 - proceso aleatorio discreto: tienen variables aleatorias de distribución discreta. ej: la salida de un limitador ideal es un proceso aleatorio binario.
- Un proceso aleatorio es ergódico si todos los promedios de tiempo de cualquier función muestral es igual a los promedios conjuntos correspondientes
 - Si un proceso es ergódico, todos los promedios de tiempo y conjuntos son intercambiables: el promedio temporal no puede ser función del mismo, el proceso ergódico debe ser estacionario, no todos los procesos estacionarios son ergódicos.
 - La media y las funciones de autocorrelación de un proceso estacionario en sentido amplio no cambian con un desplazamiento del origen del tiempo.
 - La función de autocorrelación entrega una idea de la respuesta en frecuencia asociada a un proceso aleatorio.

Densidad espectral de potencia

- suponga que $x(t, E_i)$ representa una función muestral de un proceso aleatorio $x(t)$
- Si un proceso X_T es un proceso aleatorio, dado que x_T también lo es.

→ expresión general de densidad:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(f) df$$

entonces, la PSD para un proceso aleatorio $x(t)$ se obtiene de:

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{[|X_T(f)|^2]}{T} \right), \text{ con } X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Teorema de Wiener-Khinchine

→ Forma de evaluar la PSD a partir de la función de autocorrelación del proceso aleatorio es utilizando este teorema:

Cuando $x(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio, la PSD puede obtenerse mediante la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

$$P_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

→ Al comparar la definición de la PSD con los resultados del Teorema, se obtienen métodos para evaluar la PSD de un proceso aleatorio.

→ La PSD se obtiene con el método directo a través de: $P_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{[|X_T(f)|^2]}{T} \right)$

→ La PSD se obtiene con el método indirecto a través de la evaluación de la transformada de Fourier de $R_x(\tau)$

Propiedades de la PSD:

• $P_x(f)$ siempre es real; $P_x(f) \geq 0$; cuando $x(t)$ es real, $P_x(-f) = P_x(f)$;

$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(f) df$ es la potencia normalizada total; Si $x(t)$ es estacionario en sentido amplio $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(f) df = P = \overline{x^2} = R_x(0)$; $\mathcal{P}_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) d\tau$